

CONTRIBUTION A LA RESOLUTION DE L'EQUATION NON LINEAIRE DE LA CHALEUR

BERNARD-HENRI CAUSSADE

INP-ENSEEIH, Institut de Mécanique des Fluides, Laboratoire Associé au C.N.R.S.,
2, Rue Charles Camichel, 31071-Toulouse-Cedex, France

(Reçu le 22 avril 1975)

Résumé—On propose une méthode hybride, qui associe un ordinateur à un réseau RC, pour résoudre les problèmes régis par l'équation non linéaire de la chaleur. Outre sa grande rapidité de résolution, cette méthode, du fait de l'évolution continue du temps dans le réseau permet de s'affranchir des critères liant le choix des pas de discrétisation dans l'espace et dans le temps, qui sont les inconvénients majeurs des méthodes numériques. La méthode est ensuite appliquée à un problème classique, nous avons choisi l'étude de l'échauffement et du refroidissement d'un mur dont les caractéristiques thermophysiques varient fortement avec la température. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux fournis par différentes méthodes numériques.

NOTATIONS

- x , variable d'espace [m];
- L , longueur [m];
- t , variable de temps [s];
- Δ , opérateur Laplacien;
- T , température [°K];
- T_0 , température initiale du mur;
- T_1 , température de la face d'entrée;
- λ , conductivité thermique [J/m s °C];
- c , chaleur spécifique [J/kg °C];
- ρ , masse spécifique [kg/m³];
- a , $= \frac{\lambda}{\rho c}$ diffusivité thermique [m²/s⁻¹];
- a_0 , $= \frac{\lambda_0}{\rho c_0}$ diffusivité thermique à la température T_0 ;
- k , $= \frac{T_1 - T_0}{T_0}$ paramètre de perturbation;
- ϕ , potentiel de Kirchhoff [$d\phi = d(T) \cdot dT$];
- $g(\phi)$, $= \frac{\rho c(\phi)}{\lambda(\phi)}$ fonction qui est ici l'inverse d'une diffusivité, mais qui peut être quelconque;
- $f(\phi)$, fonction quelconque;
- ϕ , potentiel au nœud du réseau [V];
- Λ , rapport des échelles de temps analogique et de temps réel;
- R , résistance du réseau [Ω];
- C , capacité du réseau [F];
- ε , $= \phi' - \phi$, différence entre réponse réseau et solution du problème au nœud considéré;
- $\bar{\Delta}$, opérateur de différences secondes;
- δt , durée de la tranche de temps [s];
- δx , pas du réseau [m];
- G , primitive de g ;
- ϕ_n , solution à l'instant t ;
- ϕ_{n+1} , solution à l'instant $t + \delta t$;
- ϕ_{n+1} , réponse du réseau à l'instant $t + \delta t$;
- ω , coefficient de convergence.

1. INTRODUCTION

LE PHÉNOMÈNE de diffusion thermique est régi par une équation aux dérivées partielles du type parabolique plus communément appelée "équation de la diffusion".

Cette équation est linéaire tant que le coefficient de conductivité thermique λ et la chaleur spécifique c ne dépendent que des coordonnées d'espace x et de temps t . Cette condition ne se rencontre que pour très peu de corps car il est plus fréquent de voir la conductivité et la chaleur spécifique dépendre de la température.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \rho c(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Pour résoudre cette équation, plusieurs moyens sont à la disposition de l'ingénieur ou du chercheur. Il se pose donc un problème de choix au niveau du type de méthode le mieux adapté. Les méthodes analytiques classiques sont limitées aux problèmes linéaires. Les méthodes analogiques basées sur l'utilisation d'un réseau de résistances ou d'un réseau de résistances et de capacités ou d'un calculateur analogique à courant continu sont elles aussi limitées au linéaire car leur mise en oeuvre devient, soit inconcevable manuellement, soit très coûteuse en matériel. Les méthodes numériques basées sur la passage aux différences finies ou aux éléments finis sont l'outil le mieux adapté à l'heure actuelle à la solution de l'équation (1). Pourtant malgré la puissance des ordinateurs modernes, ces méthodes restent lourdes donc coûteuses en temps d'utilisation machine.

Nous allons, à partir d'une méthode hybride, basée sur la liaison d'un ordinateur avec un réseau de résistances et de capacités [1, 2], résoudre le problème de l'échauffement et du refroidissement d'un mur dont les caractéristiques thermophysiques varient avec la température.

Nous comparerons les résultats obtenus avec ceux donnés par les méthodes numériques classiques [3, 4].

Cette méthode, comme nous allons le voir, tend à cumuler les avantages des deux moyens, c'est à dire d'une part l'évolution du temps continue dans les réseaux, d'autre part les capacités de mémoire et de calcul de l'ordinateur. On connaît en effet les difficultés de calcul de la dérivée en temps dans les algorithmes numériques implicites: les schémas sont conditionnellement ou inconditionnellement stables ou instables suivant que l'on prend une différence arrière, centrée ou avant. La capacité C dans un réseau RC présente au contraire l'avantage d'élaborer à tout instant une véritable dérivée en temps.

2. RAPPELS SUR LES PRINCIPES ET EXTENSIONS DE LA METHODE

2.2 Principe

La méthode s'inspire des travaux de Renard et Loc [5]. Nous en développons les principes en considérant l'équation non linéaire de la diffusion à une dimension d'espace.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho c(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2}$$

Une nouvelle fonction ϕ peut être définie, à partir de la transformation de Kirchhoff.

$$d\phi = \lambda(T) \cdot dT \tag{3}$$

l'équation (2) devient alors:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = g(\phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{4}$$

ou sous forme symbolique, en utilisant l'opérateur Laplacien en Δ :

$$\Delta \phi = g(\phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{5}$$

avec:

$$g(\phi) = \frac{\rho c(\phi)}{\lambda(\phi)} \tag{6}$$

L'équation (5) est valable dans un domaine donné avec des conditions aux limites et initiales bien définies. Elle prend la forme discrétisée classique:

$$\Sigma(\phi_i - \phi) = \delta x^2 \cdot g(\phi) \cdot \frac{d\phi}{dt} \tag{7}$$

Considérons par ailleurs un réseau à résistances capacités tel que celui de la Fig. 1.

Le potentiel ϕ' aux noeuds du réseau obéit à la relation:

$$\Sigma(\phi' - \phi) = RC \cdot \frac{d\phi'}{dt} = \Lambda RC \cdot \frac{d\phi'}{dt} \tag{8}$$

Λ étant le rapport des échelles de temps analogique et de temps réel.

Pour que l'analogie puisse exister, il faudrait que les impédances R ou C varient en fonction de ϕ suivant la loi $g(\phi)$.

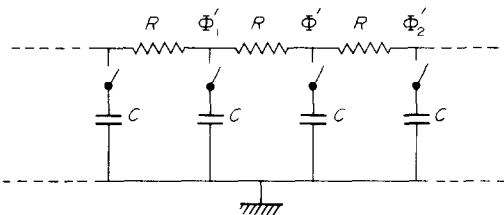


FIG. 1. Réseau à résistances et capacités.

On peut cependant résoudre l'équation proposée en considérant les évolutions de ϕ et ϕ' pendant un intervalle de temps en admettant qu'à l'instant t , $\phi = \phi'$.

2.2 Algorithme de calcul de la solution

Nous allons montrer comment à partir de la réponse ϕ' donnée par le réseau au bout d'une tranche de temps donnée δt on peut calculer la solution ϕ , pour cette tranche de temps, que l'on aurait obtenue si les capacités avaient été à tout instant proportionnelles à $g(\phi)$.

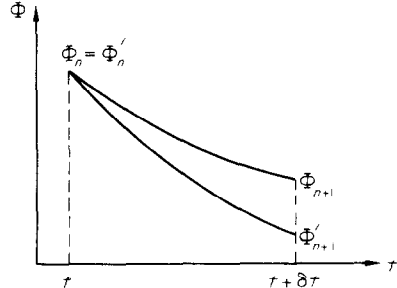


FIG. 2. Evolution de ϕ et ϕ' pendant une tranche de temps δt .

Soit, Fig. 2: ϕ_n la solution à l'instant t ; ϕ_{n+1} la solution à l'instant $t + \delta t$; ϕ'_{n+1} la réponse du réseau à l'instant $t + \delta t$.

On suppose, comme nous l'avons dit, qu'à l'instant t il y a identité des ϕ et des ϕ' , c'est à dire que nous avons:

$$\phi_n = \phi'_n \tag{9}$$

Si nous désignons par $\bar{\Delta}$ l'opérateur de différences secondes on peut écrire les équations du réseau et du problème sous la forme:

$$\Sigma(\phi_i - \phi) = \bar{\Delta} \phi = \delta x^2 \cdot g(\phi) \cdot \frac{d\phi}{dt} \text{ pour le problème} \tag{10}$$

$$\Sigma(\phi'_i - \phi') = \bar{\Delta} \phi' = \Lambda RC \cdot \frac{d\phi'}{dt} \text{ pour le réseau.} \tag{11}$$

En appelant ε la différence entre ϕ et ϕ'

$$\phi' = \phi + \varepsilon(x, t) \tag{12}$$

et en soustrayant (10) de (11), nous obtenons pour tout instant de la tranche de temps:

$$\Lambda RC \cdot d\phi' = \Delta \varepsilon dt + \delta x^2 g(\phi) \cdot d\phi \tag{13}$$

Intégrons cette relation entre t et $t + \delta t$

$$\phi'_{n+1} = \phi'_n + \frac{\delta x^2}{\Lambda RC} \int_{\phi_n}^{\phi_{n+1}} g(\phi) \cdot d\phi + \frac{1}{\Lambda RC} \int_t^{t+\delta t} \bar{\Delta} \varepsilon \cdot dt \tag{14}$$

que nous pouvons écrire en faisant intervenir (12):

$$\mathcal{L}(\varepsilon_{n+1}) \equiv \phi'_{n+1} - \phi_n - \frac{\delta x^2}{\Lambda RC} [G(\phi'_{n+1} - \varepsilon_{n+1}) - G(\phi_n)] - \frac{1}{\Lambda RC} \int_t^{t+\delta t} \bar{\Delta} \varepsilon \cdot dt = 0 \tag{15}$$

où G est une primitive de g .

Au temps $t + \delta t$ une fois lue la réponse ϕ' du réseau, tous sauf ε est connu dans (15).

En faisant l'approximation suivante:

$$\int_t^{t+\delta t} \Delta \varepsilon \cdot dt \simeq \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{n+1} \delta t \quad (16)$$

ou peut calculer ε_{n+1} donc ϕ_{n+1} grâce à l'algorithme numérique suivant:

$$\varepsilon_{n+1}^k = \varepsilon_{n+1}^k + \omega \cdot \mathcal{L}(\varepsilon_{n+1}^k) \quad (17)$$

où ω est un coefficient de convergence et k le numéro de l'itération.

Dans ces conditions, le processus de résolution est le suivant:

1. A l'instant t on impose les conditions initiales aux têtes des capacités (dont les pieds sont à la masse) puis on relie simultanément toutes ces têtes de capacités aux noeuds du réseau de résistances et on laisse évoluer l'ensemble pendant une tranche de temps δt .
2. A l'instant $t + \delta t$ on déconnecte simultanément toutes ces têtes de capacités, on lit leurs tensions ϕ' , on calcule ϕ .
3. On impose ces valeurs en nouvelles conditions initiales pour une seconde tranche de temps δt et ainsi de suite jusqu'à couvrir tout le temps intéressant le phénomène.

Le méthode hybride proposée associe donc un réseau résistances capacités à un ordinateur.

L'ordinateur a pour mission d'assurer le calcul du terme $g(\phi)$ d'une manière qui soit moins onéreuse que des opérateurs analogiques parce que moins dépendante du nombre de noeuds sur le plan du volume de technologie. Aussi, la méthode proposée consiste-t-elle à accepter une relative perte de temps en choisissant un fonctionnement alternatif des parties analogiques et numériques plutôt qu'un fonctionnement simultané.

L'hybride apporte la même erreur que le numérique car en effet on n'est pas certain que l'algorithme utilisé pour obtenir la solution à partir de la réponse du réseau a convergé vers la bonne valeur, on peut simplement dire en toute rigueur que l'on a atteint un état de stationnarité. Une autre erreur introduite par l'hybride est due à l'approximation faite sur l'intégrale $\int \Delta \varepsilon \cdot dt$. Cette deuxième erreur peut créer une solution théoriquement plus erronée que la solution numérique mais à la seule condition que la discrétisation du numérique soit excessivement fine ce qui entraîne des coûts de résolution considérables.

2.3 Principe du calculateur hybride

Le principe de la méthode conduit au schéma de la Fig. 3. L'ordinateur fournit les informations relatives aux conditions initiales à un convertisseur numérique-analogique (C.N.A.) qui permet de charger les capacités de façon séquentielle par l'intermédiaire d'un système de commutation. Ces opérations étant effectuées, l'ordinateur commande la fermeture en bloc des relais qui permettent la liaison de l'ensemble des capacités avec le réseau de résistances et laisse évoluer le réseau RC pendant une tranche de temps δt , avant de commander l'ouverture en bloc de ces mêmes relais afin de figer l'évolution du réseau.

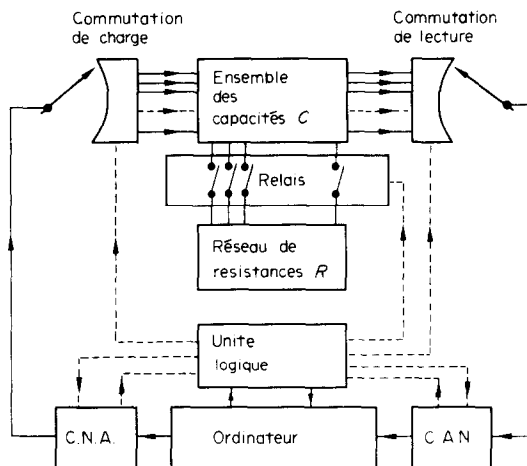


FIG. 3. Schéma bloc du calculateur hybride.

Un système de commutation de lecture, sous contrôle de l'ordinateur, permet la mesure séquentielle des tensions à la tête des capacités, tensions qui, après conversion analogique-numérique (C.A.N.) sont mémorisées. L'ordinateur assure le calcul des conditions initiales de la tranche de temps suivante, qui sont les solutions du problème, et les opérations sont répétées pour les tranches de temps suivantes qui représentent l'évolution du phénomène étudié.

2.4 Imposition des conditions aux limites

Le réseau étant constitué, il convient de lui imposer les conditions aux limites du problème traité. (On s'arrête à des conditions linéaires.)

Elles peuvent être de trois types:

- Dirichlet: le potentiel est connu en tous points du contour du domaine
- Neumann: elle revient à injecter en un point un courant donné
- Fourier: elle se traduit par l'imposition simultanée d'un potentiel et d'un courant connus.

Des générateurs de tension et des générateurs de courant sont utilisés dans la pratique. Leur conception et leur réalisation ainsi que leur performances sont décrites dans un article cité en [6].

On peut remarquer que ces dispositions permettent en outre de représenter, par injection aux noeuds du réseau, des termes autres que ceux que nous avons envisagés pour établir le principe de la méthode et qui peuvent être des termes de l'équation indépendants du temps. De plus, ces injecteurs qui sont associés à une mémoire analogique permettent de faire fonctionner le système hybride avec uniquement un réseau de résistances

2.5 Extension de la méthode

Nous allons montrer que l'application de cette méthode peut s'étendre à la résolution de l'équation de diffusion comportant un terme en $\partial \phi / \partial x$ ou $\partial \phi / \partial y$ et qui s'écrit d'une façon générale:

$$\Delta \phi = g(\phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(\phi) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (18)$$

Ce nouveau terme peut être représenté par des injections de courant aux différents noeuds du réseau; nous avons vu, au paragraphe 2.4 que cela était possible à partir des générateurs de courant servant à imposer certaines conditions aux limites ou initiales. Nous allons voir qu'il est aussi possible de prendre en compte ce nouveau terme, non plus au niveau de la partie analogique, mais au niveau de l'algorithme de recherche de la solution à partir de la réponse du réseau.

Une démarche identique à celle qui a été faite au paragraphe 2.2 conduit à :

$$\Sigma(\phi_i - \phi) = \bar{\Delta}\phi = \delta x^2 \cdot g(\phi) \cdot \frac{d\phi}{dt} + \delta x^2 \cdot f(\phi) \cdot \frac{d\phi}{dx}$$

pour le problème discrétisé (19)

$$\Sigma(\phi'_i - \phi') = \bar{\Delta}\phi' = \Lambda RC \cdot \frac{d\phi'}{dt} \quad \text{pour le réseau RC} \quad (20)$$

pour tout instant de la tranche de temps en un noeud i , nous obtenons :

$$\Lambda RC \cdot d\phi' = \Delta \varepsilon \cdot dt + \delta x^2 \cdot g(\phi_i) d\phi + \frac{\delta x}{2} \cdot f(\phi_i) \cdot (\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) dt. \quad (21)$$

Intégrons cette relation entre t et $t + \delta t$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varepsilon_{n+1}) &\equiv \Lambda RC(\phi'_{i,n+1} - \phi_{i,n}) \\ &- \delta x^2 [G(\phi'_{i,n+1} - \varepsilon_{i,n+1}) - G(\phi_{i,n})] \\ &- \int_t^{t+\delta t} \bar{\Delta} \varepsilon \cdot dt \\ &- \frac{\delta x}{2} \int_t^{t+\delta t} f(\phi_i) \cdot (\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) dt = 0. \quad (22) \end{aligned}$$

On voit qu'il est possible de calculer ε_{n+1} donc ϕ_{n+1} à partir de (22) grâce au même processus numérique que celui que nous avons déjà évoqué, à condition de consentir les approximations suivantes :

$$\int_t^{t+\delta t} \bar{\Delta} \varepsilon dt \simeq \frac{1}{2} \bar{\Delta} \varepsilon_{n+1} \delta t \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+\delta t} f(\phi_i) \cdot (\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) dt \\ &\simeq \frac{\delta t}{2} \{ [f(\phi_i) \cdot (\phi_{i+1} - \phi_{i-1})]_{n+1} \\ &\quad + [f(\phi_i) \cdot (\phi_{i+1} - \phi_{i-1})]_n \}. \quad (24) \end{aligned}$$

Nous faisons ici deux approximations, la première nous en avons déjà parlé, la deuxième peut être justifiée par un choix judicieux de la durée de la tranche de temps.

3. APPLICATION NUMERIQUE

3.1 Position du problème [6]

Au cours d'une table ronde qui avait été organisée à Toulouse en Avril 1972 par le Groupement Universitaire de Thermique et la Section Thermocimétique de la Société Française des Thermiciens, un certain nombre de participants avait proposé d'effectuer une comparaison entre différentes méthodes de résolution de l'équation de la chaleur. Nous nous sommes associés à cette entreprise.

On considère un mur d'épaisseur L pour lequel la loi de variation de la conductivité thermique $\lambda(T)$ et de la chaleur volumique $\rho c(T)$ du matériau qui le constitue, sont supposées connues dans un domaine de température (T_0, T_1) . Ce mur initialement porté à un niveau de température uniforme T_0 subit sur l'une de ses faces un échelon de température d'amplitude $\pm(T_1 - T_0)$ tandis que l'autre face est maintenue au niveau T_0 .

En admettant que les isothermes sont des sections droites parallèles aux faces du mur, il s'agit de déterminer la loi d'évolution des températures $T_{x,t}$ en tout plan, d'abscisse x_0 tel que $0 < x_0 < L$. Dans ces conditions, le système d'équation à résoudre est le suivant :

$$\left. \begin{aligned} \rho c(T) \cdot \frac{\partial T_{(x,t)}}{\partial t} &= \lambda(T) \cdot \frac{\partial^2 T_{(x,t)}}{\partial x^2} + \frac{d\lambda}{dT} \cdot \left(\frac{\partial T_{(x,t)}}{\partial x} \right)^2 \\ T_{(x,0)} &= T_0 \\ T_{(0,t)} &= T_1 \\ T_{(L,t)} &= T_0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Pour uniformiser les notations, on rend le problème adimensionnel en effectuant sur les variables x, t et T , la transformation affine définie par :

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{a_0(t-t_0)}{L^2}, \quad T_{(x^*,t^*)} = \frac{T_{(x,t)} - T_0}{T_1 - T_0} \\ \text{si l'on pose: } a_0 &= \frac{\lambda_0}{\rho_0 c_0} \\ \frac{\lambda(T)}{\lambda_0(T_0)} &= \lambda^*(T^*), \quad \frac{\rho c(T)}{\rho_0 c_0(T_0)} = \rho^* c^*(T^*), \\ &\frac{a(T)}{a_0(T_0)} = a^*(T^*). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Le système (25) devient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} &= a^*(T^*) \cdot \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{d\lambda^*}{dT^*} \cdot \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)^2 \cdot \frac{1}{\rho^* c^*(T^*)} \\ T_{(x^*,0)} &= 0 \quad x^* \in [0, 1], \\ T_{(0,t^*)} &= 1 \\ T_{(1,t^*)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

3.2 Données numériques

Cette étude étant strictement comparative, on pouvait se contenter de matériaux fictifs, pour lesquels les lois de variations des caractéristiques thermophysiques seraient représentées par des fonctions analytiques données a priori.

Il a semblé préférable d'envisager des matériaux réels afin de pouvoir, le cas échéant, tirer certaines conclusions pratiques des résultats obtenus. Le cuivre pur a été choisi en raison du nombre important d'études expérimentales dont il a fait l'objet. D'autre part, le domaine des basses températures semblait s'imposer puisque l'on recherchait d'importantes variations des caractéristiques λ et c .

(Les températures sont exprimées en Kelvin.)

Une compilation récente de ces études effectuée par Taylor, a permis de connaître des valeurs moyennes des coefficients λ et c dans le domaine de température (7K, 30K)—Fig. 4.

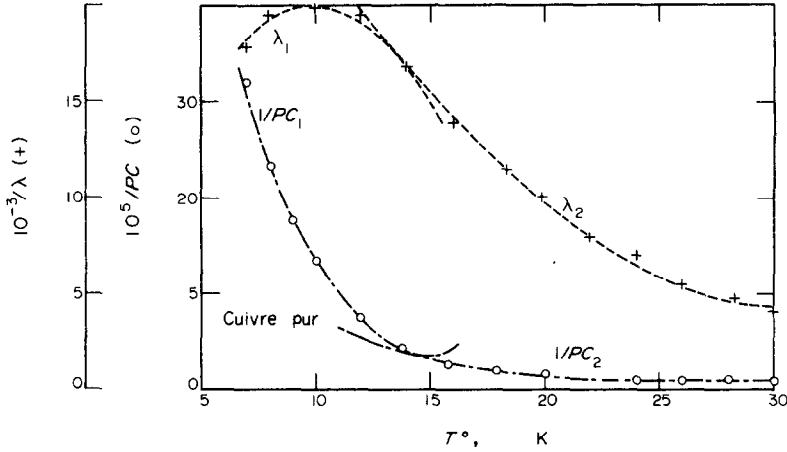


FIG. 4. Evolution des coefficients λ et c dans le domaine de température (7K, 30K).

Deux approximations paraboliques au sens des moindres carrés ont été nécessaires pour chacune de ces deux grandeurs avec recoupement au point (14K)

Pour $7 \leq T \leq 14K$

$$10^{-3}\lambda = 2,194 + 3,535T - 0,177T^2$$

$$10^5/\rho c = 99,97 - 13,193T + 0,4527T^2$$

Pour $14 \leq T \leq 30K$

$$10^{-3}\lambda = 44,46 - 2,52T + 0,0395T^2$$

$$10^5/\rho c = 14,95 - 1,047T + 0,0189T^2.$$

Nous traiterons deux problèmes, l'un correspondant aux données $T_0 = 10K$, $T_1 = 12$ et $8K$ (échelon de $\pm 2K$) et l'autre aux données $T_0 = 20K$, $T_1 = 24$ et $16K$ (échelon de $\pm 4K$).

Dans le premier cas, le paramètre de perturbation a pour valeur $k = \pm(T_1 - T_0)/T_0 = \pm 0,2$ et le comportement thermique du matériau est défini par :

$$\lambda/\lambda_0 = 1 - 0,00252kT^* - 0,892k^2T^{*2}$$

faible variation de λ

$$\rho_0 c_0/\rho c = 1 - 3,11kT^* + 3,40k^2T^{*2}$$

forte variation de c

$$T_0 = 10K, \lambda_0 = 19844, 1/\rho_0 c_0 = 13,31 \cdot 10^{-5}$$

(Unités SI).

Dans le second cas, le paramètre de perturbation a la même valeur $k = \pm 0,2$ que ci-dessus, mais les lois de comportement deviennent :

$$\lambda/\lambda_0 = 1 - 1,907kT^* + 1,602k^2T^{*2}$$

forte variation de λ

$$\rho_0 c_0/\rho c = 1 - 3,67kT^* + 4,79k^2T^{*2}$$

faible variation de c

$$T_0 = 20K, \lambda_0 = 9860, 1/\rho_0 c_0 = 1,58 \cdot 10^{-5}$$

(Unités SI).

Les problèmes sont ainsi parfaitement définis.

3.3 Première méthode de résolution

Elle se caractérise par l'utilisation de la transformation de Kirchhoff.

L'équation à résoudre :

$$\rho^* c^*(T^*) \cdot \frac{\partial T^*}{\partial t} = \lambda^*(T^*) \cdot \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{2*}} + \frac{d\lambda^*}{dT^*} \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^2} \right)^2 \quad (28)$$

provient en réalité de :

$$\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\lambda^*(T^*) \cdot \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) = \rho^* c^*(T^*) \cdot \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad (29)$$

On peut dans l'équation (29) extraire la non linéarité du premier membre en utilisant la transformation de Kirchhoff :

$$d\phi^* = \lambda^*(T^*) \cdot dT^* \quad (30)$$

l'équation (29) devient :

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^{2*}} = \alpha^*(\phi^*) \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} \quad (31)$$

avec

$$\alpha^*(\phi^*) = \frac{\rho^* c^*(\phi^*)}{\lambda^*(\phi^*)} \quad (32)$$

L'équation (31) est identique à l'équation (5) et le calcul des solutions ϕ^* se fait au moyen du réseau RC et de l'algorithme (17) avec $\mathcal{L}(\varepsilon_{n+1})$ donné par la relation (15).

Comme on voit, la résolution ne peut se faire directement. Il faut tout d'abord calculer la fonction $\alpha^*(\phi^*)$.

Pour cela la relation (30) permet de déterminer la relation $\phi^*(T^*)$, $\alpha^*(T^*) = \rho^* c^*(T^*)/\lambda^*(T^*)$ est connu, nous pouvons donc déduire $\alpha^*(\phi^*)$ sous forme d'une table de valeurs. Ces valeurs sont ensuite lissées par un polynôme. Nous avons choisi une méthode de lissage au sens des moindres carrés par un polynôme de Tchébyshev.

Une fois les solutions ϕ^* obtenues, il faut revenir à la variable T^* .

3.4 Deuxième méthode de résolution

La résolution de l'équation (28) peut être envisagée directement sous la forme où elle est proposée. En effet, cette équation est identique à l'équation (18).

Les solutions T^* sont calculées à partir du réseau RC et de l'algorithme (17) dans lequel $\mathcal{L}(\varepsilon_{n+1})$ prend la forme suivante, qu'une démarche identique à celle

Tableau 1. Résultats obtenus avec les méthodes mentionnées pour ($7 \leq T \leq 14K$)

		A	B	C	D	E	F	G	H
$t = 0,0003$	$x = 0,05$	0,03891	0,03893	0,03680			0,04282	0,04262	
	$x = 0,10$	0,00013	0,00013	0,00011		0,00004	0,00031	0,00031	
	$x = 0,20$	0,0	0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	
	$x = 0,30$	0,0	0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	
	$x = 0,40$	0,0	0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	
$t = 0,0075$	$x = 0,05$	0,64264	0,64263	0,64259	0,64309		0,63908	0,64266	
	$x = 0,10$	0,36785	0,36783	0,36763	0,36840	0,37363	0,36607	0,36746	
	$x = 0,20$	0,08524	0,08524	0,08510	0,08540	0,07988	0,08522	0,08528	
	$x = 0,30$	0,01178	0,01178	0,01174	0,01170	0,01153	0,01195	0,01187	
	$x = 0,40$	0,00092	0,00092	0,00091	0,00090	0,00087	0,00094	0,00094	
$t = 0,0150$	$x = 0,05$	0,74075	0,74074	0,74072	0,74093		0,73617	0,74060	0,745
	$x = 0,10$	0,51705	0,51705	0,51696	0,51732	0,52551	0,51416	0,51692	0,520
	$x = 0,20$	0,21263	0,21263	0,21257	0,21203	0,21467	0,21177	0,21267	0,217
	$x = 0,30$	0,06890	0,06890	0,06886	0,06894	0,06862	0,06880	0,06890	0,072
	$x = 0,40$	0,01713	0,01713	0,01712	0,01711	0,01689	0,01720	0,01713	0,019
$t = 0,0225$	$x = 0,05$	0,78632	0,78632	0,78626	0,78640		0,78113	0,78630	
	$x = 0,10$	0,59392	0,59391	0,59389	0,59410	0,60290	0,59030	0,59392	
	$x = 0,20$	0,30251	0,30251	0,30237	0,30270	0,30676	0,30103	0,30263	
	$x = 0,30$	0,13212	0,13212	0,13209	0,13220	0,13259	0,13166	0,13218	
	$x = 0,40$	0,04884	0,04883	0,04882	0,04890	0,04854	0,04877	0,04880	
$t = 0,030$	$x = 0,05$	0,81403	0,81402	0,81397	0,81409		0,80843	0,81406	0,818
	$x = 0,10$	0,64273	0,64273	0,64268	0,64284	0,65169	0,63860	0,64279	0,649
	$x = 0,20$	0,36783	0,36782	0,36762	0,36795	0,37363	0,36584	0,36798	0,369
	$x = 0,30$	0,18788	0,18787	0,18777	0,18795	0,18941	0,18706	0,18800	0,200
	$x = 0,40$	0,08505	0,08505	0,08499	0,08508	0,08496	0,08479	0,08505	0,095

A—Méthode du potentiel thermique.

B—Méthode itérative.

C—Méthode de prédiction-corréction.

D—Méthode explicite d'Euler.

E—Méthode de perturbation.

F—Deuxième méthode hybride en simulation numérique.

G—Première méthode hybride en simulation numérique.

H—Première méthode hybride sur calculateur hybride.

1^R Cas $k = +0,2$.

développée au paragraphe 2.5 permet d'établir aisément:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varepsilon_{n+1}) \equiv & [T_i^*]_{n+1} - [T_i^*]_n \\ & - \frac{\delta x^2}{\Delta RC} \{ [f(T^*)]_{n+1} + [f(T^*)]_n \} \\ & \quad \times \{ T_{n+1}^* - T_n^* \} \\ & - \frac{\delta t}{2\Delta RC} \{ \varepsilon_{i+1}^* - 2\varepsilon_i^* + \varepsilon_{i-1}^* \}_{n+1} \\ & + \frac{\delta t}{8\Delta RC} \{ [g(T^*) \cdot (T_{i+1}^* - T_{i-1}^*)^2]_{n+1} \\ & \quad + [g(T^*) \cdot (T_{i+1}^* - T_{i-1}^*)^2]_n \} = 0 \quad (33) \end{aligned}$$

avec

$$f(T^*) = \frac{\rho^* c^*(T^*)}{\lambda^*(T^*)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda^*(T^*)} \cdot \frac{d\lambda^*}{dT^*} = g(T^*).$$

3.5 Comparaison des résultats

Avant de réaliser un modèle probatoire de calculateur hybride basé sur les principes que nous venons de donner, nous avons simulé son fonctionnement par calcul numérique. La simulation a pour objet, grâce à la souplesse inhérente au calcul numérique de pouvoir établir le bien fondé de la méthode en considérant le calculateur hybride comme étant idéal dans ses parties analogiques et son interface, et aussi de pouvoir analyser facilement l'influence des caractéristiques des

différents composants de la partie analogique et de l'interface sur la précision des résultats et ainsi de préciser a priori les caractéristiques qu'il est raisonnable de leur donner.

En réalisant le calculateur hybride notre souci n'a pas été d'optimiser les éléments, mais d'utiliser ceux qu'il était le plus commode de mettre en oeuvre pour réaliser un modèle probatoire compte tenu notamment du matériel dont nous disposions.

3.5.1 *Comparaison de la précision.* Le Tableau 1 présente les résultats obtenus avec différentes méthodes pour $\delta x = 0,01$ [4].

La colonne F du tableau correspond à ce que nous avons appelé deuxième méthode, les résultats ont été obtenus par simulation numérique. La colonne G correspond à la première méthode, là aussi les résultats ont été obtenus par simulation numérique. La colonne H correspond aux résultats hybrides obtenus sur le calculateur hybride en passant par la transformation de Kirchhoff.

Il est intéressant de constater tout d'abord que les méthodes numériques pour lesquelles $\delta t = 1,666 \cdot 10^{-5}$ donnent des résultats très voisins et spécialement les méthodes A et B qui présentent des écarts de l'ordre de 10^{-5} . Nous allons comparer nos résultats avec la méthode A (Crank-Nicolson) en considérant qu'elle

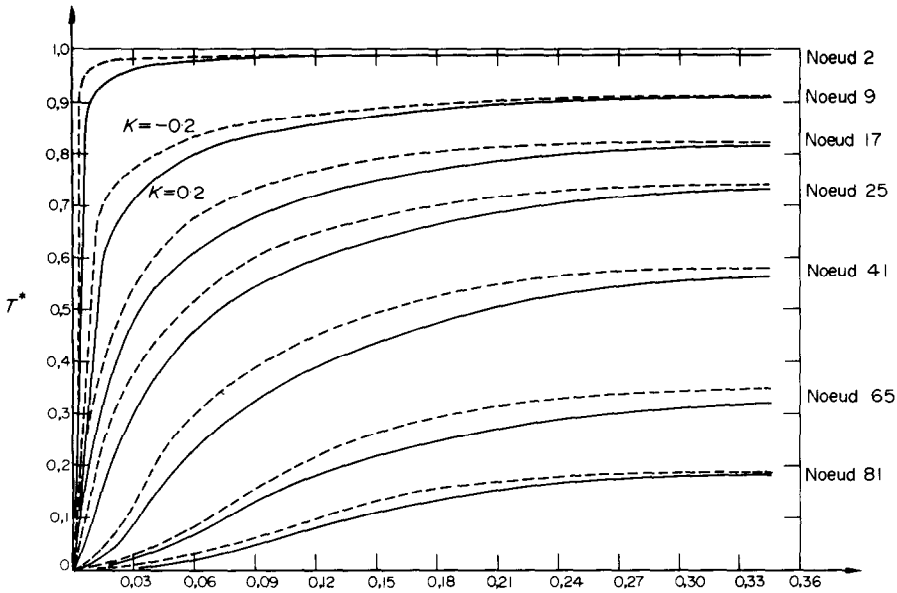


FIG. 5. Evolution, en différents points du domaine, de la température en fonction du temps ($7 \leq T \leq 14K$).

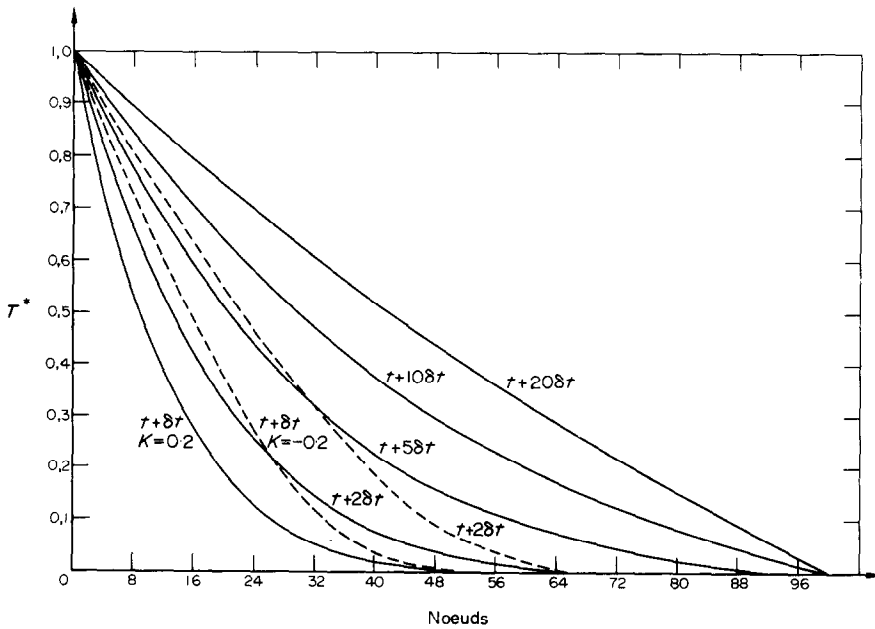


FIG. 6. Evolution de la température dans le domaine pour différents tranches de temps ($14 \leq T \leq 30K$).

donne une bonne approximation des résultats du problème posé.

La deuxième méthode hybride en simulation numérique, F , avec $\delta t = 3 \cdot 10^{-4}$ donne des écarts de l'ordre de 10^{-3} . La première méthode hybride en simulation numérique, G , avec $\delta t = 3 \cdot 10^{-4}$ donne des écarts de 10^{-4} . Ces résultats montrent déjà que l'on a intérêt à utiliser cette première méthode.

La première méthode hybride sur ordinateur hybride, H , avec $\delta t = 1,5 \cdot 10^{-2}$ donne des écarts de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3}$. Nous avons pris des δt relativement importants car le fait de diminuer δt n'augmente pas la précision des résultats de façon sensible. Ce résultat

est aussi très important car il montre que l'on peut choisir des durées de tranche de temps très importantes sans perdre de la précision.

La Fig. 5 montre pour le premier cas avec $k = 0,2$ et $k = -0,2$ l'évolution, en différents points du domaine, de la température en fonction du temps. On constate une dissymétrie, due à la non-linéarité, entre l'échauffement et le refroidissement du domaine.

La Fig. 6 montre pour le deuxième cas avec $k = 0,2$ et $k = -0,2$ l'évolution de la température dans le domaine pour différentes tranches de temps. Là aussi on constate une dissymétrie entre l'échauffement et le refroidissement.

3.5.2 *Comparaison des temps de calcul.* Nous considérons que le schéma de Crank–Nicolson donne la meilleure approximation numérique du problème posé.

La méthode hybride en simulation numérique est plus rapide que la méthode utilisant le schéma de Crank–Nicolson, (méthode *A* sur le Tableau 1). En effet, pour la plage d'étude en temps considérée (voir Tableau 2), c'est à dire 100 tranches de temps ayant chacune pour durée $\delta t = 3 \cdot 10^{-4}$, nous obtenons un gain de temps de 50 pour cent, si nous utilisons la première méthode hybride en simulation numérique. (C'est à dire qu'elle est deux fois plus rapide.)

La première méthode hybride sur calculateur hybride

de $5 \cdot 10^{-3}$ sur les résultats par rapport à ceux donnés par la méthode *A*.

Ceci est d'autant plus intéressant que si l'on veut étudier comme nous l'avons fait, l'évolution transitoire de la température jusqu'au régime permanent; il n'est, dans ce cas, pas nécessaire d'avoir un découpage si fin que celui précédemment considéré, dans le temps. Dans ces conditions, il faudrait avec le système hybride composé d'un réseau *RC* et d'un IBM 370-165, environ 7 s pour obtenir le régime permanent. La méthode *A* demanderait sur IBM 370-165 environ 20 min.

Ces chiffres et considérations montrent à l'évidence la rapidité de la méthode que nous proposons.

Tableau 2. Comparaison des temps de calcul

Méthode	δt	Calculateur	Durée du calcul
Algorithme Crank–Nicolson	$3 \cdot 10^{-4}$	IBM 370-165	2 min
Première méthode hybride en simulation numérique	$3 \cdot 10^{-4}$	IBM 370-165	1 min
Deuxième méthode hybride en simulation numérique	$3 \cdot 10^{-4}$	IBM 370-165	1 min 25 s
Première méthode hybride sur calculateur hybride	$3 \cdot 10^{-4}$	IBM 370-165 couplé à un réseau <i>RC</i>	30 s
Première méthode hybride sur calculateur hybride	$3 \cdot 10^{-4}$	MITRA 15 couplé à un réseau <i>RC</i>	2 min 30 s

est plus rapide que la première méthode hybride en simulation numérique, donc a fortiori plus rapide que la méthode *A*. En effet, si l'on utilise un IBM 370-165 couplé à un réseau *RC*, il faudrait dans les mêmes conditions que précédemment, environ 30 s pour résoudre le problème posé (Tableau 2). La simulation du réseau demande sensiblement le même temps que la résolution de l'algorithme permettant la recherche de la solution exacte, c'est à dire pour 100 tranches de temps, environ 30 s. Le calculateur hybride demande pour obtenir la solution réseau des 100 tranches de temps, dans l'état actuel de la technologie, $40 \text{ ms} \times 100 = 4 \text{ s}$. Ce qui donne un temps de résolution total d'environ 34 s, c'est à dire 4 s pour la réponse réseau et 30 s pour le calcul de la solution exacte sur 100 tranches de temps.

Autrement dit: la première méthode hybride sur calculateur hybride avec le même calculateur numérique est sensiblement 4 fois plus rapide que la méthode numérique *A*.

Si l'on remplace l'IBM 370-165 par un mini-ordinateur moderne du type MITRA 15, dans la boucle hybride, on peut espérer en première approximation que les temps de calcul numérique, c'est à dire ceux correspondant aux calculs des solutions exactes seront environ 5 fois plus longs. La technologie de l'interface restant la même que celle que nous avons utilisée. Cela veut dire qu'il faudrait environ 2 min 30 s sur le calculateur hybride avec MITRA 15 contre 2 min pour la méthode *A* sur IBM 370-165.

Ce résultat est déjà très intéressant mais nous avons montré qu'il était possible d'augmenter la durée des tranches de temps avec un facteur 50, lorsque l'on utilise le calculateur hybride (paragraphe 3.5.1) tout en ayant, avec la technologie actuelle, des écarts de l'ordre

CONCLUSION

Les résultats que nous venons d'exposer montrent que la méthode hybride mise au point est une contribution originale, utile et intéressante à la résolution d'une classe importante de problèmes de thermique.

La contribution est originale, par le développement d'une méthode nouvelle et utile parce qu'elle apporte un progrès sensible dans la résolution des problèmes régis par des équations du type parabolique qui, malgré les progrès de l'analyse numérique et la puissance accrue des calculateurs numériques continue à retenir l'attention de nombreux chercheurs.

La méthode est intéressante par: la simplicité de sa mise en oeuvre, et le gain de temps qu'elle procure vis à vis des résolutions strictement numériques.

Le calculateur hybride que nous avons réalisé, qui souffre d'une technologie d'interface dépassée, est susceptible d'être très sensiblement amélioré en ce qui concerne ses performances. La qualité des composants actuels est déjà excellente, et l'avenir ne peut apporter que des améliorations dans ce domaine, tant au point de vue performances que prix de revient.

BIBLIOGRAPHIE

1. B. Caussade, J. Pakleza, J. Piquemal et G. Renard, Résolution de l'équation de diffusion non linéaire à l'aide d'un calculateur hybride à réseau *RC*, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris* **277**, 543–546 (1973).
2. B. Caussade, Simulation de phénomènes de diffusion non linéaires par système hybride, Thèse de Doctorat d'Etat soutenue à Toulouse (1975).
3. A. Talamon, Sur la diffusion non-linéaire de la chaleur, *Int. J. Heat Mass Transfer* **11**, 1351–1357 (1968).

4. R. Jalin, D. Balageas, J. Bransier et G. Lauriat, Methods for solving the non linear thermal diffusion equation, XIIIe conférence sur la conductivité thermique, Lake of the Ozarks, Missouri, U.S.A. (5-7 novembre 1973).
5. T. Phuoc Loc et G. Renard, Résolution de l'équation de diffusion non linéaire par l'emploi de réseaux actifs couplés à un calculateur analogique à courants continus, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris* **266**, 73-76 (1968).
6. J. Bransier, Sur les méthodes d'approximation des solutions de l'équation de diffusion thermique non linéaire, Bulletin d'information du groupement universitaire de thermique, n°2, 91-95 (Juin 1973).

CONTRIBUTION TO THE NONLINEAR HEAT EQUATION RESOLUTION

Abstract—A hybrid method, associating a numerical computer with a RC network, is proposed so as to resolve the problems ruled by the nonlinear heat equation. Beyond its great velocity of resolution, this method because of the time continuing evolution in the network, permits to become free of the criteria connecting the choice of the discretisation steps in space and in time, which are the major disadvantages of numerical methods.

Then, this method is applied to a standard problem, we have chosen the study of the heating and cooling of a semi infinite wall in which thermophysical characteristics are changing highly with the temperature. Results are compared with those given by some numerical methods.

BEITRAG ZUR LOSUNG DER NICHTLINEAREN WARMEGLEICHUNG

Zusammenfassung—Nach einer Hybridmethode mit einem numerischen Komputern und einem Widerstandskapazitätsnetz können Probleme der nichtlinearen Wärme Gleichung gelöst werden. Neben der grossen Lösungsgeschwindigkeit ist diese Methode—wegen der zeitlich kontinuierlichen Entwicklung im Netz—unabhängig von der Wahl der Diskretisierung von Raum und Zeit, die als Hauptnachteile der numerischen Methode gelten können.

Die Methode wird auf ein Standardproblem angewandt, nämlich der Heizung und Kühlung einer halbinendlichen Wand mit temperaturabhängigen Stoffwerten. Die Ergebnisse sind mit denen anderer numerischer Methoden verglichen.

К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Аннотация—Для решения задач, описываемых нелинейным уравнением теплопроводности, предлагается комбинированный метод, позволяющий использовать численный расчет на вычислительной машине с методом сеток. Помимо быстроты решения этот метод позволяет освободиться от критериев, связывающих выбор пространственных и временных шагов, что является основным недостатком численных методов.

Метод использован для решения обычной задачи нагревания и охлаждения полубесконечной стенки, теплофизические характеристики которой изменяются значительно с температурой.

Дано сравнение с результатами некоторых численных методов.